DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2025.01.019

环形弹性杆扭转失稳特性的研究及应用

谢琦,袁卫锋

(西南科技大学制造科学与工程学院制造过程测试技术教育部重点实验室,621010 绵阳)

摘 要:建立了环形弹性杆的有限元模型,研究其在连续扭转作用下的力学响应,分析环形弹性杆在不同约束条件下的多稳态特性。静力学模拟发现,承受扭矩的环形弹性杆在特定约束下发生突弹跳变,但失稳后的环形弹性杆恢复为其初始形状,因而存在循环失稳的独特现象;动力学分析表明,环形弹性杆抗扭的变形模态和突跳翻转的时机不但依赖于其几何及材料性质,而且和扭转速度相关。据此,提出了一种单自由度功能-结构一体式机构,可通过环形弹性杆的扭转产生复杂的波浪形运动并被应用于仿生机器鱼的运动驱动中。与传统的机构相比,环形弹性杆机构结构简单,易于控制,在软体机器人设计中具有良好的应用前景。

关键词:环形弹性杆;扭转失稳;有限元;仿生机器鱼

中图分类号:TB122 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-4939(2025)01-0174-08

Research and application of torsional buckling characteristics of ring-shaped elastic rod

XIE Qi, YUAN Weifeng

(Key Laboratory of Testing Technology for Manufacturing Process, Ministry of Education, School of Manufacturing Science and Engineering, Southwest University of Science and Technology, 621010 Mianyang, China)

Abstract: In this article, finite element models of a ring-shaped elastic rod under continuous torsion and various constraints are established to study its response and multistability characteristics. In static simulation, the ring-shaped elastic rod buckles when subject to specific constraints but its shape turns back to its initial form after snap-through to exhibit a special phenomenon of cyclic instability. In dynamic modelling, the anti-torsion deformation and the critical snap-through moment of the elastic rod depend on not only its geometry and material properties, but also the torsion speed. Based on these findings, an integrated function-structure mechanism with single degree of freedom is proposed. The new type mechanism produces complex wave motion through the torsion of the ring-shaped elastic rod, so that it can be used in robotic fish. Compared with the conventional mechanism, the proposed ring-shaped elastic rod is of simple structure and easy-to-control, therefore it holds good promise to be applied in the design of soft robots.

Key words: ring-shaped elastic rod; torsional buckling; finite element; bionic robotic fish

收稿日期:2022-01-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12072300)

通信作者:袁卫锋。E-mail:yuanweifeng@swust.edu.cn

引用格式:谢琦,袁卫锋. 环形弹性杆扭转失稳特性的研究及应用[J]. 应用力学学报,2025,42(1):174-181.

XIE Qi, YUAN Weifeng. Research and application of torsional buckling characteristics of ring-shaped elastic rod[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(1):174-181.

弹性细杆平衡与稳定性问题的研究可以追溯到 13 世纪,历经数个世纪的探索与研究,为后面弹性杆的研究奠定了理论基础[1-3]。

研究者们探究了弹性细杆在不同边界下的稳定性问题。例如对约束于圆柱管内的弹性杆端部施加力矩[4]、在细长杆的一端同时施加轴向拉力和扭矩[5]、在弹性杆一端扭转后松弛[6]以及不同截面的弹性细杆在力和力矩作用下的螺旋平衡及其稳定性[7-8]。且有相关研究证明了弹性杆动态转变过程是减少了黏性能量的耗散,WADA[9]给出了这一现象的几何解释,为弹性杆在扭曲运输提供了一个基本方案。

弹性杆模型广泛应用于生物科学和实际工程领域,例如石油钻杆[10]、电缆线[11]蜷曲、生物大分子 DNA 的研究[12]等。蔡宗熙[10]将实验与模拟相结合,从杆的几何、材料特性以及相对速度方面,探究弹性杆在刚性基底上产生卷绕的形态。展阔杰等[13]考虑电缆线的自重并建立了相应模型,通过求取解析解和数值解的方法得到更符合实际电缆的形态变化。BALAEFF 等[14]改进了经典的弹性理论模型,该模型被应用于由 lac 阻遏蛋白夹住的 DNA 环的测试案例研究。萧业等[15]推导了 DNA 弹性细杆模型的 Euler-Lagrange 方程,通过实验的对比,在合适的参数下,该模型能很好地模拟 A-DNA 和 B-DNA 的平衡模态。

通过模仿鱼类的外形及运动方式,可以减少传统的刚性机构噪声大、效率低、耗能高等弊端,因此仿生机器鱼的研究成为许多研究者们关注的热点领域[16-17]。例如:SUZUMORI 等[18]设计了一种通过气压驱动的橡胶制动器,并开发了一种形状类似蝠鲼的软体机器人; KATZSCHMANN 等[19]制作了由液压驱动的软体机器鱼,以水为传动液的闭路驱动系统来驱动软体,水通过体内通道的循环控制着鱼的尾鳍推进力和偏航运动;范增等[20]仿照魟鱼的运动机制提出胸鳍波动与摆动融合推进方式,该方式可改善机器鱼的游动性能。

在现有研究中,大多关注的是长直类弹性细杆在不同边界条件下的失稳与稳定性研究。本研究基于环形结构的弹性杆在扭转作用下具有突弹跳变现象,并利用 ABAQUS 有限元软件建立模型,分别对环形弹性杆的初始形状、扭转速度及截面几何的失稳响应进行了分析;根据环形弹性杆的失稳特性提出了一种单自由度的柔性驱动机构,设计并制造了一种柔性仿生机器鱼原理样机,该研究为水下机器人的研究提供一种简易的柔性传动方式。

1　环形弹性杆的突弹跳变

1.1　模型

在实际观测中发现,橡皮筋在扭转作用下会发生突弹跳变现象(图 1a)。两手分别持橡皮筋的两端,一端连续、缓慢地扭转橡皮筋,另一端会出现周期性的突跳现象。基于该发现,建立了相应的理论模型(图 1b),驱动端和释放端的距离固定,其中驱动端对弹性杆施加连续的角位移,弹性杆因此产生扭转。



图 1　弹性杆环形结构

Fig. 1　Structure of ring-shaped elastic rod

基于理论模型,在 ABAQUS 模块中构建了有限元模型(图 1c):环形弹性杆分为 2 段,2 段的弹性杆用连接梁连接,连接梁的作用是为了便于计算和给定边界条件;其中环形弹性杆采用 C3D8R 实体单元,连接梁采用 B31 梁单元。将弹性杆的截面与梁端绑定在一起,定义主表面为梁端上的节点,从表面为弹性杆的截面,共需定义 4 对绑定关系。设置两端连接梁的距离固定且只能转动,其中一端施加连续均匀的角位移。在计算的过程中发现,弹性杆的 4 个截面网格容易发生面外的变形,从而影响计算的结果,为了计算时更易收敛,将垂直于4 个截面方向上平移设为 0。在该有限元分析模型中所使用的材料参数如表 1 所示,弹性杆的杨氏模量为 2.4 MPa,泊松比为 0.47。通过查阅相关资料,弹

性杆的材料阻力 α 和结构阻尼 β 设置为 $0.01\ \mathrm{N\cdot s\cdot mm^{-1}}$。

表 1 数值模拟中的材料参数

Tab. 1 Material parameters in numerical simulation

部件	弹性模量/MPa	泊松比	密度/($\mathrm{t\cdot mm^{-3}}$)	阻尼/($\mathrm{N\cdot s\cdot mm^{-1}}$)
连接梁	2.1×10^{5}	0.3	7.9×10^{-9}	–
弹性杆	2.4	0.47	8×10^{-10}	$\alpha=\beta=0.01$

1.2 结果分析

为探究环形弹性杆在扭转作用下的运动状态，首先设置相应的模型参数：假设环形弹性杆中心线的初始形状为圆形（周长 $L=2\pi R_0$），弹性杆的截面设置为边长 a 的正方形，设置 a/R_0 为 0.06。

首先，采用静态 RIKS 方法进行分析，该方法与一般的位移增量法和载荷增量法不同之处在于引入了一个弧长参数，通过控制弧长来实现增量步从而获得位移-载荷的关系。此外，RIKS 方法对塌陷、屈曲、跳跃等非线性问题有很好的求解效果。图 2(a) 是分析得出的位移-载荷曲线。从图中可以看出，随着驱动端的转角 θ_q 增加，释放端的转角位移 θ_s 无明显变化，且在曲线末尾端经过数次回复，始终没有出现突跳的过程。经过分析，这是由于环形结构的弹性杆，发生失稳后的模态恢复为其初始形状，这种现象导致其失稳变形的路径追踪困难。为了更好地解释环形弹性杆的突跳现象，将采用动力学分析方法进行研究分析。

动力学分析由于引入了惯性力，从而可以得出环形弹性杆发生突跳的过程。图 2(b) 展示了动力学分析中驱动端与释放端位移 θ 随时间 t 变化的曲线图。随着驱动端角位移均匀连续的输入，释放端角位移呈现周期性变化，当时间到达一定阈值时，角位移突然跳到 2π。该结果表明环形结构的弹性杆模型将连续均匀的输入转化为周期性的脉冲输出，与实际情况相符。

此外，由有限元分析结果表明，环形弹性杆在扭转失稳下会发生平面外的变形。图 3 为环形弹性杆的形变图。由图 3 可知，当驱动端转过不同角度时，弹性杆翘曲的幅度不同。受此启发，本研究提出了一种柔性驱动机构的设计方法，并将其应用于柔性机器鱼的设计中，该机器鱼的运动与鳐鱼的运动类似。

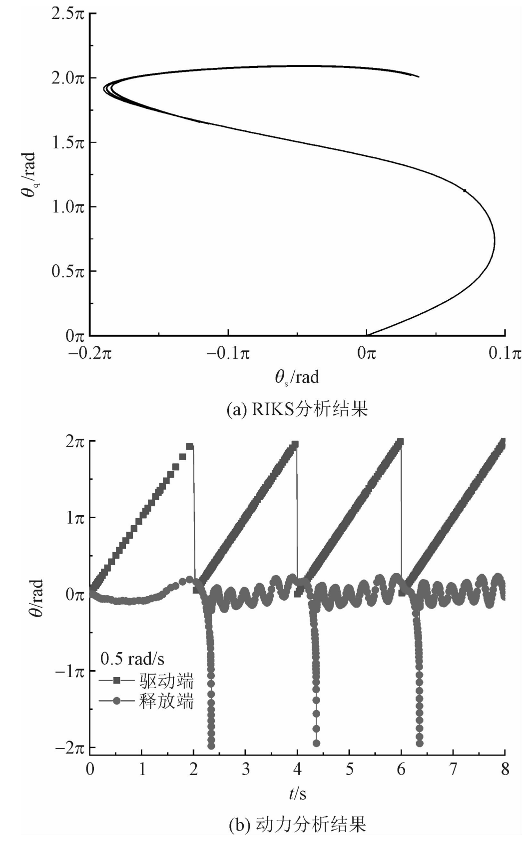


图 2 有限元分析结果

Fig. 2 Finite element analysis results

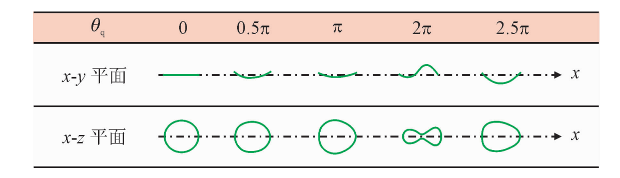


图 3 环形弹性杆的形变图

Fig. 3 Deformation diagram of ring-shaped elastic rod

2 参数分析与讨论

环形弹性杆在扭转作用下会发生循环失稳，其突跳的时机与环形弹性杆的几何与材料性质有关。此外，环形弹性杆在扭转失稳的过程中，会发生平面外的翘曲。为了定性地分析环形弹性杆失稳过程，考虑了弹性杆的截面几何、角位移加载速度以及初始形状对突跳失稳的动态响应。

2.1 不同截面几何的动态响应

环形弹性杆的粗细是影响弹性杆刚度的重要参数，本节分析了圆截面和方截面的环形弹性杆的扭转失稳特性。设置环形弹性杆中心线的初始形状为圆形（周长 $L=2\pi R_0$），驱动端转速为 $1\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。$r$ 为

圆截面半径，a 为方截面边长。r/R_0 和 a/R_0 表示环形弹性杆的粗细。

图 4 是不同截面几何的动态响应图，图 4(a)、图 4(b)分别是截面为圆形和方形的环形弹性杆在不同粗细的情况下的分析结果对比图。从图 4 中可以观察到：①方截面和圆截面有类似的规律；②在 r/R_0 值为 0.04 和 0.05 时，2 种截面的环形弹性杆在驱动端达到一定值时，释放端的角位移突跳到 2π 后没有立刻回到 0，而出现了停留；③其他情况下，随着驱动端角度的增加到一定值时，环形弹性杆释放端的角度突跳到 2π 后立刻回到 0。

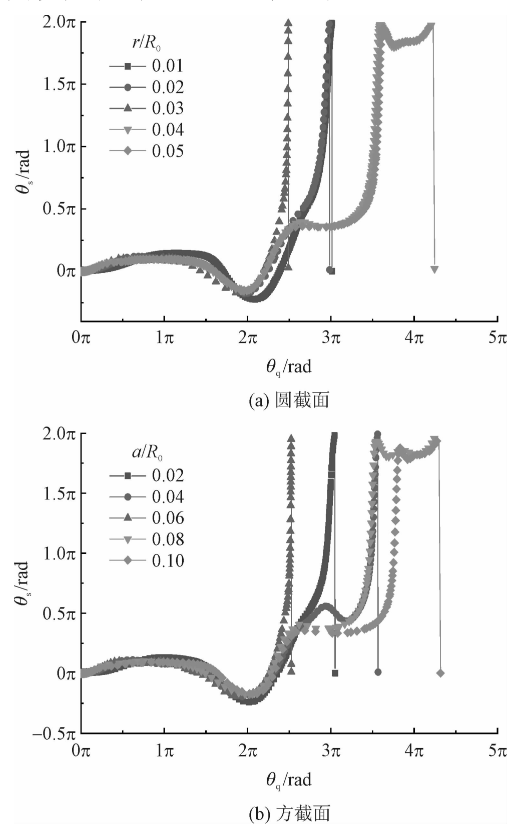


图 4　不同截面几何的动态响应

Fig. 4　The dynamic response of different cross-section geometries

图 4 中结果表明，当环形弹性杆的粗细不同时，其发生突跳的时机也不同，环形弹性杆发生扭转失稳的过程也不相同。因此，可以通过调节环形弹性杆的截面几何，来获得不同的运动形态。

2.2　不同驱动端转速的动态响应

驱动端扭转的速度对环形弹性杆发生突跳失稳的时机有一定的影响。如图 5 所示，在同一环形弹性杆的情况下，当驱动端的转速不同时，环形弹性杆发生突跳失稳的时机也不同。因此，对驱动端不同转速的动态响应进行分析具有十分重要的意义。

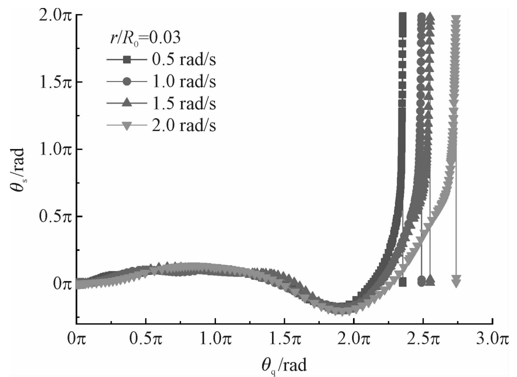


图 5　同一截面下不同转速的动态响应

Fig. 5　Dynamic response of different speeds under the same section

设置环形弹性杆中心线的初始形状为圆形(周长 $L = 2\pi R_0$)，选取释放端的角度第一次突跳到 2π 时驱动端的转角 θ_L (称 θ_L 为临界角)，分析其变化规律。由图 6 可知，5 条曲线代表了不同粗细的环形弹性杆，整体曲线呈上升趋势。这表明同一种几何结构下的环形弹性杆在发生扭转时，扭转的转速越快，环形弹性杆突跳翻转时驱动端转过的角度越大。同时，从前面得知环形弹性杆的粗细会对于扭转失稳的过程有一定影响，但从图 6 可以看出，同转速下不同 r/R_0 的环形弹性杆的突跳时机没有呈现一定的规律。

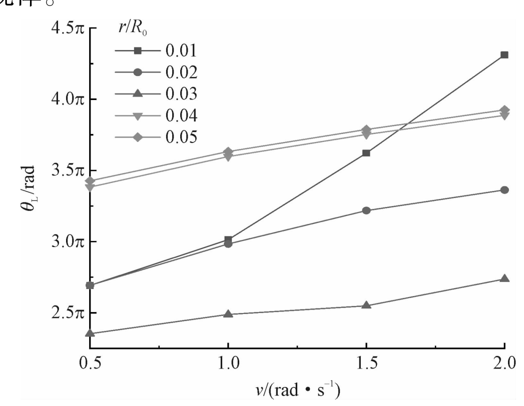


图 6　不同圆形截面下不同转速的影响

Fig. 6　The influence of different speeds under circular cross section

2.3　不同初始形状的动态响应

环形弹性杆扭转失稳的过程中会发生平面外的翘曲，翘曲的幅度与环形弹性杆的初始形状有关，对于圆截面和方截面有类似的规律，这里取弹性杆的截面形状为圆形、驱动端转速为 1 rad · s^{-1} 、r/R_0 为 0.03 时，对环形弹性杆的初始形状进行讨论。

假设环形弹性杆中心线的初始形状为圆形(周

长 $L = 2\pi R_0$),周长 L 固定不变,控制伸缩端沿 x 方向的运动,从而改变环形弹性杆两端的距离 $2b$,定义 b/R_0 的比值用来描述环形弹性杆的形状。

图7(a)是环形弹性杆在不同的初始形状下,释放端随驱动端的动态响应图。从图中可以看出,b/R_0 不同时,环形弹性杆发生突跳失稳的时机也不同。图7(b)描述了在第一个突跳周期内,不同弹性杆环形结构下的形变图,从图中可以得出:初始形状的不同时,环形弹性杆在扭转下翘曲的幅度不同。当 b/R_0 的值过小时,弹性杆运动会出现交叉现象,过大时,翘曲的幅度不明显;随着 b/R_0 的值增大时,翘曲的幅度减小。

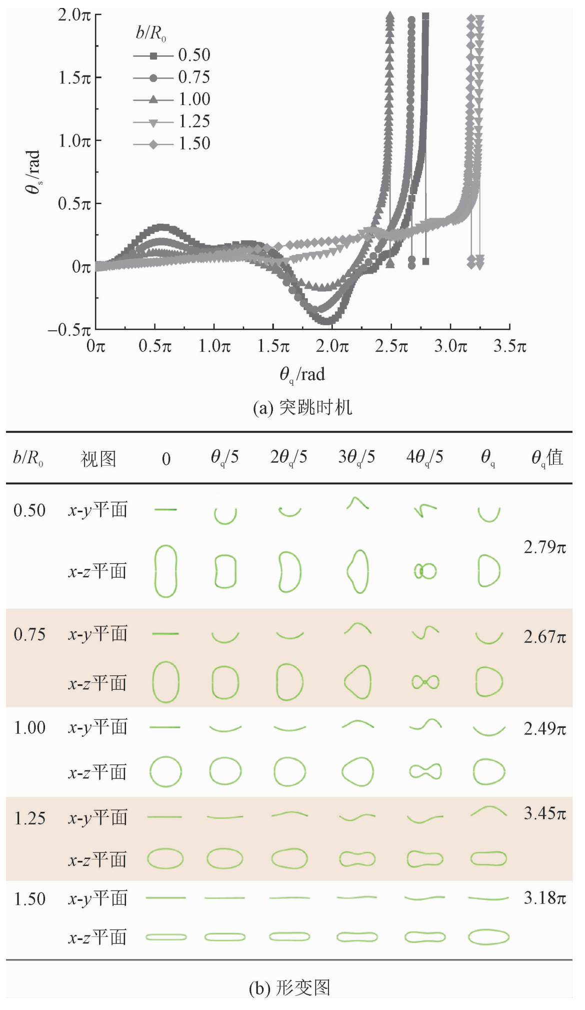


图7　不同环形弹性杆的动态响应

Fig. 7　Dynamic response of different ring-shaped elastic rods

因此,在设计软体机器人时可以通过调节环形弹性杆的初始形状,来获得不同的运动形态。

3　软体机器人中的应用

通过模仿鱼类的外形和运动方式,可以减少传统的刚性机构噪声大、结构复杂等弊端[16-17]。在海洋中有一种身体扁平的软骨鱼刺鳐,如图8(a)所示。刺鳐在游动时,依靠体盘的波动来驱动身体。这类鱼的游动速度不快,但能量利用率较高,体盘在慢速波动时也能推动着身躯运动,增加了推进效率。环形弹性杆在持续扭转情况下发生循环失稳,其变形与刺鳐体盘边缘的运动类似,均呈现波浪形变化。因此,设想将环形弹性杆作为一种柔性的驱动机构,应用于一种柔性仿生机器鱼的设计。

图8(b)为机器鱼结构示意图,该机器鱼包括浮力躯干、固定环、柔性薄膜、弹性杆、滑块和联轴器。浮力躯干、固定环、滑块和联轴器可通过3D打印制成。其中浮力躯干内部安置双出轴电机和相应的控制单元;联轴器用于连接电机伸出轴和弹性杆;滑块可限制驱动端与释放端的距离,且在释放端约束弹性杆,使其只能转动。固定环和柔性薄膜边缘相连,弹性杆从所有的固定环中穿过。当电机轴连续转动时,扭矩通过环形弹性杆传递,弹性杆上下翘曲,通过固定环带动柔性薄膜在水中波动,从而产生推力,实现柔性机器鱼的运动。制作的柔性机器鱼在第1个运动周期中的形态如图9所示,随着电机的持续转动,环形弹性杆产生变形,状如波浪。

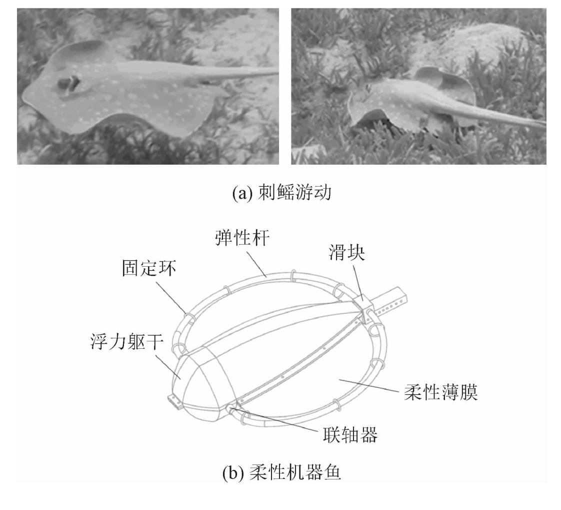


图8　刺鳐与柔性机器鱼

Fig. 8　Stingray and flexible robotic fish

本实验在尺寸为1 200 mm × 700 mm × 800 mm的玻璃缸中进行测试,利用摄像机对机器鱼的运动状态进行摄像记录。实验中柔性机器鱼的运动状态和轨迹如图10所示,0 ~ 5 s时是起步阶段,机器鱼从静止开始加速并到达匀速状态;5 ~ 20 s间,其以一定的速度向前运动,运动过程平稳,噪声低。

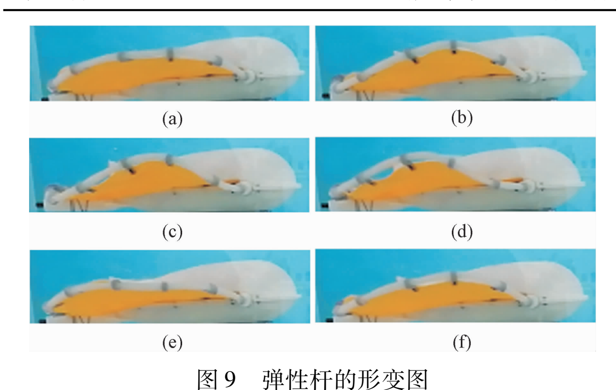


图 9　弹性杆的形变图

Fig. 9　Deformation diagram of elastic rod

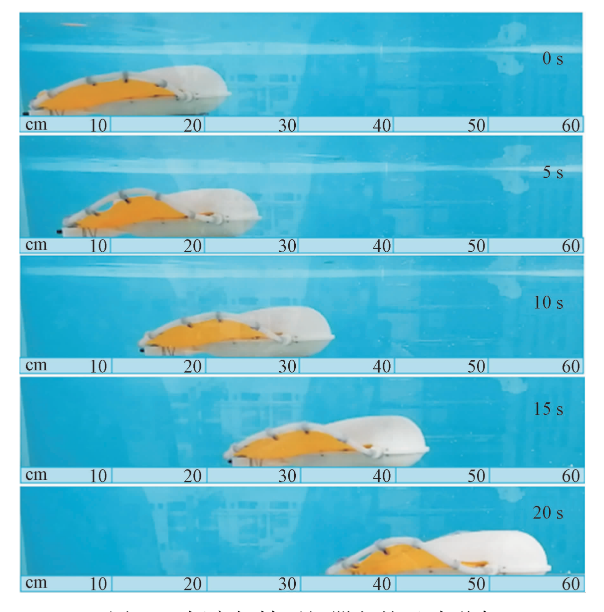


图 10　恒定扭转下机器鱼的运动形态

Fig. 10　Motion form of robotic fish under constant torsion speed

根据前面的分析可知,影响环形弹性杆扭转的动态响应参数有弹性杆的截面几何、驱动端的转速及弹性杆的初始形状。在实验中,保持弹性杆的截面几何不变,通过改变电机的转速以及机器鱼的翼型对柔性机器鱼在水下运动的状态进行定性分析。因此固定电机与尾端滑块之间的距离,本实验设计并制作了 3 种不同翼型的试验机器鱼样机,如图 11 所示,通过测量电机与尾端滑块之间的距离 a 和翼型的宽度 b_i,测得翼型 1 的尺寸为 240 mm×240 mm, b_1/a 为 1,翼型 2 的尺寸为 240 mm×360 mm, b_2/a 为 1.5,翼型 3 的尺寸为 240 mm×480 mm, b_3/a 为 2。

首先控制电机的转速探究其对机器鱼向前游动速率及运动状态的影响。所选择的减速电机的量程是 96 r/min;在试验过程中发现,电机转速对该柔性机器鱼的运动有很大的影响,在一定程度范围内,当电机的转速慢时,机器鱼边缘的弹性条翘曲的幅度有很大的变化;转速慢时,弹性杆做周期性的失稳的频率低,但其上下翘曲的幅度大,转速增大时,弹性杆做周期性的失稳的频率快,但弹性杆上下翘曲的幅度减小。图 12 为翼型 1、翼型 2 及翼型 3 在不同的电机转速下机器鱼的运动速率。

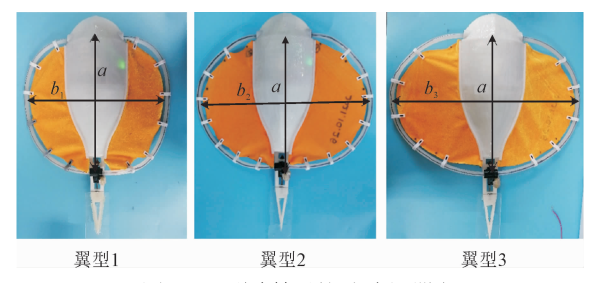


图 11　不同翼型的试验机器鱼

Fig. 11　Experimental robotic fish with different airfoils

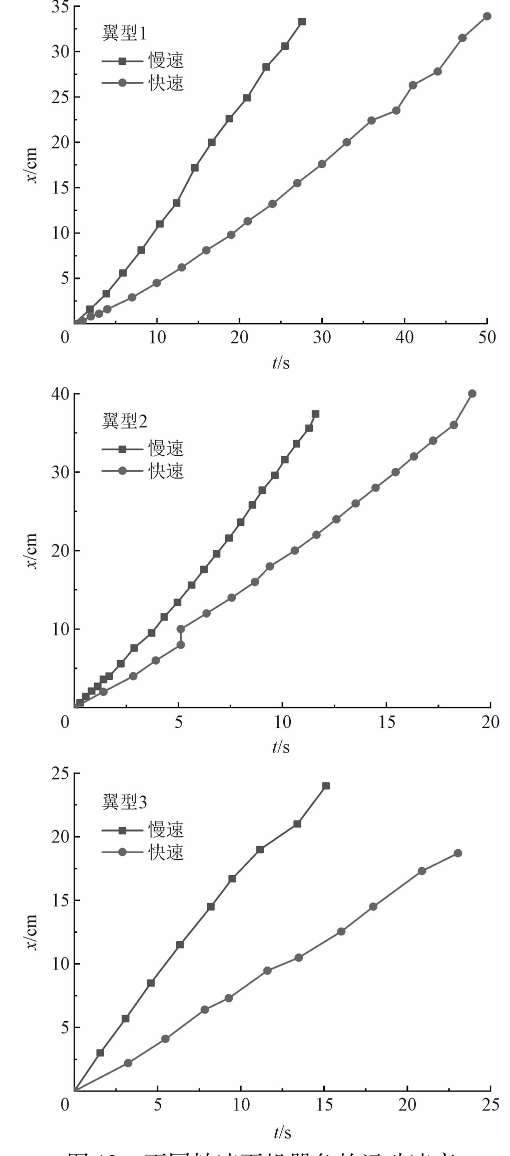


图 12　不同转速下机器鱼的运动速率

Fig. 12　The movement rate of robotic fish at different speeds

机器鱼向前运动的方向为 x 方向,方点曲线表

示电机转速相对慢时的运动曲线,圆点曲线表示电机转速相对快时的运动曲线。由图 12 可知,慢速电机相对于快速电机而言,机器鱼的运动速率反而更大,柔性机器鱼的向前运动的速率提高。该结果也可以说明本研究设计的柔性机器鱼的运动特点,即适当慢速更能使机器鱼向前运动的速率更快。机器鱼在水下运动时,相对于刚性的传动机构(如螺旋桨),对周围的扰动更小,更安静。

此外,在慢速与快速的情况下,翼型 1、翼型 2 及翼型 3 的机器鱼呈现相同的规律,即本试验所设计的机器鱼在翼型 2 的尺寸下的运动速率最大,翼型 3 的运动速率最小(图 13)。

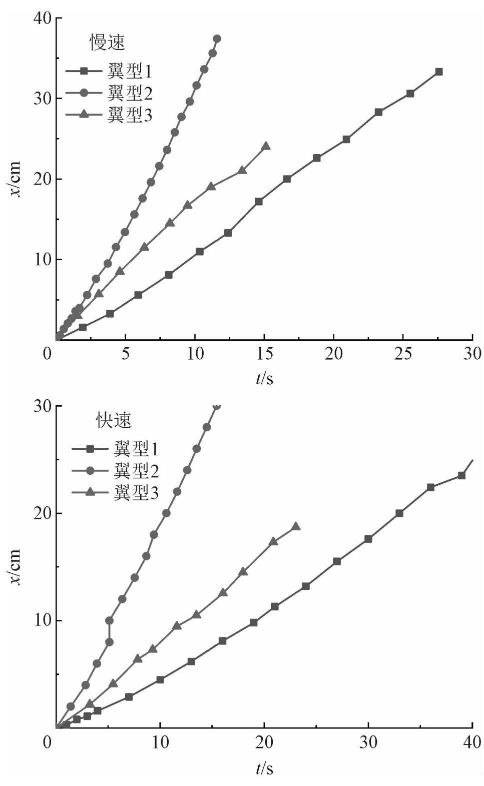


图 13 不同翼型下机器鱼的运动速率

Fig. 13 The moving speed of robotic fish under different airfoils

虽然增大机器鱼的翼型可以提高其运动速率,但是翼型太小或者太大都不利于机器鱼的运动,在 b_2/a 为 1.5 时,机器鱼的运动速率明显优于其他 2 种翼型。通过本研究分析得知:弹性杆的初始形状 b/R_0 过小时,对应的实验中机器鱼的翼型 b_2/a 越大,弹性杆翘曲的幅度越大,同时模拟中也出现了缠绕的现象,结合实验来看,对于机器鱼的运动是不利的;弹性杆的初始形状 b/R_0 过大时,对应的实验中机器鱼的翼型 b_2/a 越小,弹性杆翘曲的幅度不明显,当机器鱼在水中运动时,翼面与水之间的作用也会减弱,同样也不利于机器鱼的运动。因此,实验中才会出现翼型 2 的机器鱼在水中运动的速率最大,运动状态最好。

机器鱼样机实验验证了弹性杆作为驱动结构的可行性。另一方面,若要仿生刺鳐体盘波浪式的复杂运动,传统机械方式所涉及到的机构往往部件多,结构复杂,控制难度大,而本研究设计的机器鱼结构简单,具有单自由度控制的优点。相对于螺旋桨机构,波动推进方式的效率更高、噪音更低,应用于水下定点观测时,机动性更好,具有生物亲近性,不易伤害其他生物;另外,采用螺旋桨推进时,为防航行器侧滚,需要在结构设计中考虑平衡螺旋桨的反力矩,本机器鱼在结构设计中则不需要考虑侧滚。

4 结 论

本研究建立了环形弹性杆受扭矩作用发生失稳的有限元模型,并对弹性杆扭转失稳特性进行了数值分析,探究弹性杆的截面几何、驱动端转速以及初始形状对于弹性杆扭转失稳的影响。根据环形弹性杆的失稳特性提出了一种单自由度的柔性驱动机构,设计并制造了一种柔性仿生机器鱼原理样机。结论如下。

1)环形结构的弹性杆在一定扭转载荷下会有突跳失稳的现象。结合静态与动态分析结果发现,扭转失稳后的环形弹性杆会恢复为其初始形状,在连续的转动下存在循环失稳的独特现象。

2)环形弹性杆的截面为圆形或方形时,在驱动端施加连续扭矩,释放端都会出现周期性的突弹跳变现象。不同长径比的环形弹性杆,其失稳的模态也不尽相同;同时,弹性杆的几何尺寸相同时,驱动端转速越大,临界驱动角越大。

3)环形弹性杆在扭转失稳过程中会发生面外的翘曲,环形弹性杆的初始形状对翘曲的幅度有影响。b/R_0 的值越大,翘曲的幅度越小。

4)机器鱼原理样机验证了以环状弹性杆为驱动机构产生波浪运动的可行性,该机构在机器人领域具有广阔的应用前景。

参考文献:

[1] 刘建林. 细长杆弹性线模型的发展历史[J]. 自然杂志,2013,35(5):372-377.
LIU Jianlin. The history of elastica model on the slender rod[J]. Chinese journal of nature,2013,35(5):372-377(in Chinese).

[2] VAN DER HEIJDEN G H M,CHAMPNEYS A R,THOMPSON J

M T. Spatially complex localisation in twisted elastic rods constrained to lie in the plane[J]. Journal of the mechanics and physics of solids,1998,47(1):59-79.

[3] 薛纭，王鹏. Cosserat 弹性杆动力学普遍定理的守恒量问题[J]. 物理学报,2011,60(11):443-448.

XUE Yun,WANG Peng. The conserved quantities in general theorems of the Cosserat elastic rod dynamics[J]. Acta Physica Sinica, 2011,60(11):443-448(in Chinese).

[4] CHEN J S,LI H C. On an elastic rod inside a slender tube under end twisting moment[J]. Journal of applied mechanics,2011,78(4):041009.

[5] VAN DER HEIJDEN G H M. The static deformation of a twisted elastic rod constrained to lie on a cylinder[J]. Proceedings of the Royal Society of London. series a:mathematical,physical and engineering sciences,2001,457(2007):695-715.

[6] LI H Y,ZHAO S M,XIA M G,et al. Spontaneous formation of nonuniform double helices for elastic rods under torsion[J]. Physics letters a,2017,381(7):689-700.

[7] LIU Y Z,ZU J W. Stability and bifurcation of helical equilibrium of a thin elastic rod[J]. Acta mechanica,2004,167(1):29-39.

[8] XIAO Y,HUANG Z X. Geometric effects of cross sections on equilibrium of helical and twisted ribbon[J]. Applied mathematics and mechanics,2017,38(4):495-504.

[9] WADA H. Geometry of twist transport in a rotating elastic rod[J]. Physical review e,2011,84(4):042901.

[10] 蔡宗熙. 细杆空间大挠度问题的基本方程及其在钻井工程中的应用[J]. 应用数学和力学,1993,14(12):1049-1056.

CAI Zongxi. Fundamental equations of large spatial deflection problems of rods and its application to drilling engineering[J]. Applied mathematics and mechanics,1993,14(12):1049-1056(in Chinese).

[11] JAWED M K,DA F,JOO J,et al. Coiling of elastic rods on rigid substrates[J]. Proceedings of the national academy of sciences of the united states of america,2014,111(41):14663-14668.

[12] TOBIAS I,SWIGON D,COLEMAN B D. Elastic stability of DNA configurations. I. General theory[J]. Physical review e,2000,61(1):747-758.

[13] 展阔杰，张丹，耿琪，等. 基于 Cosserat 弹性细杆模型的电缆形态仿真[J]. 计算机仿真,2019,36(4):177-183.

ZHAN Kuojie,ZHANG Dan,GENG Qi,et al. Configuration simulation of cable harness based on Cosseart thin elastic rod model[J]. Computer simulation,2019,36(4):177-183(in Chinese).

[14] BALAEFF A,MAHADEVAN L,SCHULTEN K. Modeling DNA loops using the theory of elasticity[J]. Physical review e,2006,73(3):031919.

[15] 萧业，孔斌，李春. 基于 DNA 弹性细杆模型的 Euler-Lagrange 方程[J]. 南京航空航天大学学报,2019,51(4):540-546.

XIAO Ye,KONG Bin,LI Chun. Euler-Lagrange equations for DNA chain by an elastic rod model[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2019,51(4):540-546(in Chinese).

[16] 王田苗，郝雨飞，杨兴帮，等. 软体机器人：结构、驱动、传感与控制[J]. 机械工程学报,2017,53(13):1-13.

WANG Tianmiao,HAO Yufei,YANG Xingbang,et al. Soft robotics:structure,actuation,sensing and control[J]. Journal of mechanical engineering,2017,53(13):1-13(in Chinese).

[17] 王安忆，刘贵杰，王新宝，等. 身体/尾鳍推进模式仿生机器鱼研究的进展与分析[J]. 机械工程学报,2016,52(17):137-146.

WANG Anyi,LIU Guijie,WANG Xinbao,et al. Development and analysis of body and/or caudal fin biomimetic robot fish[J]. Journal of mechanical engineering,2016,52(17):137-146(in Chinese).

[18] SUZUMORI K,ENDO S,KANDA T,et al. A bending pneumatic rubber actuator realizing soft-bodied manta swimming robot[C]//proceedings 2007 IEEE international conference on robotics and automation. Piscataway,NJ,USA:IEEE,2007:4975-4980.

[19] KATZSCHMANN R K,MARCHESE A D,RUS D. Hydraulic autonomous soft robotic fish for 3D swimming[M]//HSIEH M A, KHATIB O,KUMAR V. Experimental Robotics:The 14th International Symposium on Experimental Robotics. Cham:Springer International Publishing,2016:405-420.

[20] 范增，王扬威，刘凯，等. 仿生机器鱼胸鳍波动与摆动融合推进机制建模及实验研究[J]. 水下无人系统学报,2019,27(2):166-173.

FAN Zeng,WANG Yangwei,LIU Kai,et al. Modeling and experimental research of integrating propulsion mechanism of pectoral fin's fluctuation and swing for the biomimetic robotic fish[J]. Journal of unmanned undersea systems,2019,27(2):166-173(in Chinese).

（编辑　张璐）